Devoir maison n$^{\text{o}}$ 6 : correction

Exercice 1. (*CCINP TPC 2023*)
Soient les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note respectivement f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B.
L'application identité de $\mathbb{R}^3$ est notée id et sa matrice associée est notée I.

1. a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

- On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \iff (A - \mathrm{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff y = x.$$

Ainsi un élément de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}}$.

- De façon analogue,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \iff (A + \mathrm{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ 2y = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}}$.

b) Calculer A^2.

On a aisément $\boxed{A^2 = \mathrm{I}}$.

c) En déduire que f est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

D'après la question précédente, on a $f \circ f = \mathrm{id}$ donc $\boxed{f \text{ est une symétrie de } \mathbb{R}^3}$. De plus, d'après le cours et la question 1.a, il s'agit de la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. a) Montrer que l'application g est bijective.

L'application g est bijective si et seulement si sa matrice B est inversible.
Méthode 1 : En développant selon la deuxième colonne, on a $\det(B) = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-1) \times (-1) = 1 \neq 0$ donc $\boxed{g \text{ est bijective}}$.
Méthode 2 : On effectue un pivot de Gauss sur B via $\mathrm{L}_2 \leftarrow L_2 - 2\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{L}_3 \leftarrow L_3 + \mathrm{L}_1$, et on obtient de suite trois pivots non nuls d'où B inversible et donc $\boxed{g \text{ bijective}}$.

b) Déterminer B^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow L_3 + \mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow L_2 - 2\mathrm{L}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow L_2 + \mathrm{L}_3}{\overset{\mathrm{L}_1 \leftarrow L_1 + \mathrm{L}_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. *Remarque : On peut confirmer en vérifiant que* $B \times B^{-1} = \mathrm{I}$.

Exercice 2. (*Un peu de calcul*)
On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. Pour $a \in \mathbb{K}$, on définit la famille $\mathcal{F}_a = (P_0,\, P_1,\, P_2,\, P_3)$ d'éléments de $\mathbb{K}_3[X]$ par

$$P_0 = a + aX^2 - X^3, \qquad P_1 = 1 - 6X + X^2 - aX^3, \qquad P_2 = -aX - aX^2 + X^3, \qquad P_3 = 1 + aX + X^2.$$

1. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = -a(a-2)(a^2+2a+3)$.

Méthode : Comme le résultat est donné, il n'est pas nécessaire de trouver à tout pris une astuce de calcul, on peut se contenter de développer d'un côté le déterminant et de l'autre le résultat donné, puis constater qu'ils sont égaux.

D'une part, on commence par écrire la matrice de la famille $\mathcal{F}_a$ dans la base $\mathcal{B}$ puis on calcule son déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -a & a \\ a & 1 & -a & 1 \\ -1 & -a & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -a & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ -1 & -a & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{dvp } L_3}{=} -a \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -6 & a \\ -1 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{dvp } C_1}{=} -a\left(a \times \begin{vmatrix} -6 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & a \end{vmatrix}\right) = -a(a^3 - a - 6).$$

D'autre part

$$-a(a-2)(a^2+2a+3) = -a(a^3 + 2a^2 + 3a - 2a^2 - 4a - 6) = -a(a^3 - a - 6).$$

Par conséquent, on a bien $\boxed{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = -a(a-2)(a^2+2a+3)}$.

2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la famille $\mathcal{F}_a$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

La famille $\mathcal{F}_a$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) \neq 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Or, d'après la question précédente,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a - 2 = 0 \text{ ou } a^2 + 2a + 3 = 0.$$

Le discriminant du trinôme du second degré vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$, il n'y a donc pas de racine réelle.
Ainsi $\boxed{\mathcal{F}_a \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X] \text{ si et seulement si } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}}$.

3. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{C}$, la famille $\mathcal{F}_a$ est-elle une base de $\mathbb{C}_3[X]$?

On procède comme à la question précédente mais en résolvant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = 0$ sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.
Comme $\Delta = -8$, les racines de $a^2 + 2a + 3 = 0$ sont $\dfrac{-2 \pm \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \mathrm{i}2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$.
Ainsi $\boxed{\mathcal{F}_a \text{ est une base de } \mathbb{C}_3[X] \text{ si et seulement si } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\,;2\,;-1-\mathrm{i}\sqrt{2}\,;-1+\mathrm{i}\sqrt{2}\}}$.

Exercice 3. [Facultatif]
Soient a, b et c trois réels distincts et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de calculer le déterminant de la matrice de taille n :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. De plus, pour tout réel x, on définit $P(x) = \det(M - xJ)$.

1. Justifier que $P(x)$ est de la forme $\alpha x + \beta$ où α et β sont deux réels ne dépendant pas de x.

Tous les coefficients de la matrice $M - xJ$ valent $a - x$ ou $b - x$ ou $c - x$. Ainsi en soustrayant la première ligne à toutes les autres, il ne reste des x que dans la première ligne. On soustrait alors la première colonne à toutes les autres et il ne reste alors un coefficient x que dans le terme $a - x$ en haut à gauche. En développant selon la première ligne (ou la première colonne), on obtient

$$P(x) = (a - x) \times (\text{dét. de taille } n - 1 \text{ sans } x) + \text{autres termes sans } x,$$

d'où la forme attendue.

2. Calculer $P(b)$ et $P(c)$. En déduire les valeurs de α et β.

• Pour $x = b$, tous les termes au-dessus de la diagonale s'annulent. Ainsi $P(b)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure, il est donc égal au produit des coefficients diagonaux qui valent tous $a - b$. Comme la matrice est de taille n, il vient $\boxed{P(b) = (a - b)^n}$.

De même $\boxed{P(c) = (a - c)^n}$ comme déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

• D'après la question précédente, on a aussi

$$\begin{cases} P(b) = \alpha b + \beta \\ P(c) = \alpha c + \beta \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow b\mathrm{L}_2 - c\mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} P(b) - P(c) = \alpha(b - c) \\ bP(c) - cP(b) = (b - c)\beta \end{cases} \overset{b \neq c}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha = \dfrac{P(b) - P(c)}{b - c} \\ \beta = \dfrac{bP(c) - cP(b)}{b - c} \end{cases}$$

d'où, via les valeurs de $P(b)$ et $P(c)$ que l'on vient de calculer :

$$\boxed{\alpha = \frac{(a - b)^n - (a - c)^n}{b - c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}}.$$

3. En déduire la valeur de $\det(M)$ en fonction de a, b, c et n.

On a $\det(M) = \det(M - 0 \times J) = P(0) = \beta = \boxed{\dfrac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}}$.